Matrix einer affinen Abbildung aus gegebenen Punkten berechnen, zweidimensional

Gegeben ist eine affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\alpha\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

und $\alpha\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

gesprochen: "alpha von zwei minus eins"

Gesucht ist die dazugehörige Matrix.

Um die Matrix zu finden, kannst Du die Einheitsvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ als Linearkombination der gegebenen Vektoren $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ darstellen und dann deren Bilder berechnen.

Dazu suchst Du Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=c\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}1&=a\cdot 2+b\cdot(-2)\\0&=a\cdot(-1)+b\cdot 2\end{aligned}\quad \text{, daraus folgt:} \quad a=1 \text{ und } b=\frac{1}{2} \quad .$$

$$\begin{aligned}0&=c\cdot 2+d\cdot(-2)\\1&=c\cdot(-1)+d\cdot 2\end{aligned}\quad \text{, daraus folgt:} \quad c=1 \text{ und } d=1 \quad .$$

Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix. Also:

$$\alpha:\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\alpha\left(1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right)=1\cdot\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\alpha\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\alpha:\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\alpha\left(1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right)=1\cdot\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+1\cdot\alpha\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Also:

$$\alpha=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Fertig.✓