

## Herleitung der Formel für die Tangente an eine Parabel

Gegeben: Eine Parabel mit der Gleichung  $y^2 = 2px$  und eine Gerade mit der Gleichung  $y = mx + n$ .

Da die gemeinsamen Punkte von Parabel und Gerade gesucht werden, kann man  $mx+n$  statt  $y$  in die Parabelgleichung einsetzen. Also:

$$(mx + n)^2 = 2px$$

Löst man diese Gleichung nach  $x$  auf, erhält man die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte. Also:

$$\begin{aligned} (mx + n)^2 &= 2px \\ m^2 x^2 + 2mx \cdot n + n^2 &= 2px \\ m^2 x^2 + 2mx \cdot n + n^2 - 2px &= 0 \\ m^2 x^2 + (2mn - 2p)x + n^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{m^2} + (2mn - 2p) \frac{x}{m^2} + \frac{n^2}{m^2} &= 0 \end{aligned}$$

$\swarrow$   
 $\swarrow$   
 $\swarrow$   
 $\swarrow$

1-binomische Formel

auf beiden Seiten  $-2px$  rechnen

$x$  ausklammern

durch  $m^2$  teilen

Die p-q-Formel ergibt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{2mn - 2p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2mn - 2p}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{m^2}} \\ x_{1,2} &= -\frac{2mn - 2p}{2m^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2mn - 2p}{2m^2}\right)^2 - \frac{n^2}{m^2}} \\ x_{1,2} &= -\frac{2(mn - p)}{2m^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2(mn - p)}{2m^2}\right)^2 - \frac{n^2}{m^2}} \\ x_{1,2} &= -\frac{mn - p}{m^2} \pm \sqrt{\left(\frac{mn - p}{m^2}\right)^2 - \frac{n^2}{m^2}} \\ x_{1,2} &= -\frac{mn - p}{m^2} \pm \sqrt{\frac{(mn - p)^2}{(m^2)^2} - \frac{n^2}{m^2}} \\ x_{1,2} &= -\frac{mn - p}{m^2} \pm \sqrt{\frac{(mn - p)^2}{m^4} - \frac{n^2}{m^2}} \end{aligned}$$

$\swarrow$   
 $\swarrow$   
 $\swarrow$   
 $\swarrow$   
 $\swarrow$   
 $\swarrow$

Doppelbruchgesetze

2 ausklammern

2 kürzen

Potenzgesetz

Potenzgesetz

Nun erfolgen einige Umformungen, die die Lösungen in eine praktisch handhabbare Form bringen

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \sqrt{\frac{(mn-p)^2}{m^4} - \frac{n^2}{m^2}}$$

mit  $m^2$  erweitern

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \sqrt{\frac{(mn-p)^2}{m^4} - \frac{n^2 m^2}{m^2 m^2}}$$

Potenzgesetz

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \sqrt{\frac{(mn-p)^2}{m^4} - \frac{n^2 m^2}{m^4}}$$

auf einen Bruchstrich schreiben

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \sqrt{\frac{(mn-p)^2 - n^2 m^2}{m^4}}$$

Wurzelgesetz

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \frac{\sqrt{(mn-p)^2 - n^2 m^2}}{\sqrt{m^4}}$$

Wurzelgesetz

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \frac{\sqrt{(mn-p)^2 - n^2 m^2}}{m^2}$$

2. binomische Formel

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \frac{\sqrt{m^2 n^2 - 2mnp + p^2 - n^2 m^2}}{m^2}$$

$m^2 n^2$  und  $-m^2 n^2$  addieren sich zu 0

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \frac{\sqrt{-2mnp + p^2}}{m^2}$$

Summanden vertauschen

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 2mnp}}{m^2}$$

p ausklammern

$$x_{1,2} = -\frac{mn-p}{m^2} \pm \frac{\sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$$

Regeln für die Vorzeichen von Brüchen

$$x_{1,2} = \frac{-(mn-p)}{m^2} \pm \frac{\sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$$

Distibutivgesetz

$$x_{1,2} = \frac{-mn+p}{m^2} \pm \frac{\sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$$

Kommutativgesetz

$$x_{1,2} = \frac{p-mn}{m^2} \pm \frac{\sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$$

Also:

$$x_1 = \frac{p-mn + \sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$$

und

$$x_2 = \frac{p-mn - \sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$$

Wenn Du diese Lösungen in die Geradengleichung  $y=mx+n$  einsetzt, erhältst Du für  $y_{1,2}$ :

$$y_1 = m \cdot \frac{p-mn + \sqrt{p(p-2mn)}}{m^2} + n$$

m kürzen

$$y_1 = \frac{p-mn + \sqrt{p(p-2mn)}}{m} + n$$

n mit m erweitern

$$y_1 = \frac{p-mn + \sqrt{p(p-2mn)}}{m} + \frac{mn}{m}$$

aus einen Bruchstrich schreiben

$$y_1 = \frac{p-mn + \sqrt{p(p-2mn)} + mn}{m}$$

-mn und mn addieren sich zu 0

$$y_1 = \frac{p + \sqrt{p(p-2mn)}}{m}$$

Ebenso erhältst Du für  $y_2$ :

$$y_2 = \frac{p - \sqrt{p(p-2mn)}}{m}$$

Die Gerade ist eine Tangente an die Parabel, wenn die Gerade und die Parabel nur einen Punkt gemeinsam haben.

Das ist genau dann der Fall, wenn  $\sqrt{p(p-2mn)} = 0$  ist, denn dann unterscheiden sich weder die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  noch die Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  voneinander. Also:

$$\sqrt{p(p-2mn)} = 0$$

beide Seiten quadrieren

$$p(p-2mn) = 0$$

beide Seiten durch p teilen

$$p-2mn = 0$$

auf beiden Seiten +2mn rechnen

$$p = 2mn$$

Der Berührungspunkt, also der einzige gemeinsame Punkt von Parabel und Gerade, soll nun mit  $B(x_B|y_B)$  bezeichnet werden.

Statt der beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{p-mn + \sqrt{p(p-2mn)}}{m^2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{p-mn - \sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$$

gibt es dann nur noch die Lösung

$$x_B = \frac{p-mn}{m^2}$$

Aus  $p=2mn$  folgt

$$\frac{p}{2} = mn$$

Also kannst Du in  $x_B = \frac{p-mn}{m^2}$  den Term  $mn$  durch  $\frac{p}{2}$  ersetzen. Also:

$$x_B = \frac{p - \frac{p}{2}}{m^2}$$

↙ ausrechnen

$$x_B = \frac{\frac{p}{2}}{m^2}$$

↙ Doppelbruchgesetz

$$x_B = \frac{p}{2m^2}$$

Statt der beiden Lösungen

$$y_1 = \frac{p + \sqrt{p(p-2mn)}}{m} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{p - \sqrt{p(p-2mn)}}{m}$$

gibt es nur noch die Lösung

$$y_B = \frac{p}{m}$$

wenn  $\sqrt{p(p-2mn)} = 0$  ist.

Wegen  $p = 2mn$  gilt auch  $\frac{p}{2m} = n$  Deshalb kannst Du die Geradengleichung

$y = mx + n$  auch so schreiben:  $y = mx + \frac{p}{2m}$  ↙ beide Seiten mit  $p/m$  multiplizieren

$$\frac{p}{m} y = \frac{p}{m} \left( mx + \frac{p}{2m} \right)$$

↙ Distributivgesetz

$$\frac{p}{m} y = \frac{p}{m} \cdot mx + \frac{p}{m} \cdot \frac{p}{2m}$$

↙ kürzen

$$\frac{p}{m} y = p \cdot x + \frac{p}{m} \cdot \frac{p}{2m}$$

↙ anders aufschreiben

$$\frac{p}{m} y = p \cdot x + \frac{p}{2m^2} \cdot p$$

Wegen  $y_B = \frac{p}{m}$  gilt dann:

$$y_B \cdot y = p \cdot x + \frac{p}{2m^2} \cdot p$$

Und wegen  $x_B = \frac{p}{2m^2}$  gilt auch:

$$y_B \cdot y = p \cdot x + x_B \cdot p$$



ausklammern

$$\underline{\underline{y_B \cdot y = p \cdot (x + x_B)}}$$

Das ist das Endergebnis. Es ist eine Geradengleichung. Diese Gleichung wird wahrscheinlich Deinen Vorstellungen von Geradengleichungen eher entgegen kommen, wenn Du sie durch  $y_B$  teilst und dann

$$y = \frac{p}{y_B} \cdot x + \frac{x_B \cdot p}{y_B}$$

erhältst. Trotzdem lautet der nun hergeleitete Satz :

Die Tangente an die Parabel  $y^2=2px$  im Punkt  $B(x_B|y_B)$  hat die Gleichung:

$$y_B \cdot y = p \cdot (x + x_B)$$