Scheitelform einer quadratischen Funktion

Wenn Du die 1. binomische Formel auf den Term $(x+3)^2$ anwendest, passiert folgendes:

$$\left(\boxed{x}+\boxed{3}\right)^2=\boxed{x}^2+2\cdot\boxed{x}\cdot\boxed{3}+\boxed{3}^2$$

Also: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Die Hälfte dieser Zahl

ist diese Zahl.

$\boxed{6:2=3} \xrightarrow{\text{zum Quadrat}} \boxed{3^2=9}$

Das ist bei der 1. binomische Formel immer so, wenn Du sie auf einen Term der Form

$$(\,x + \text{Zahl}\,)^2$$

anwendest. Z.B.:

Wenn Du die 1. binomische Formel auf den Term $(x+4)^2$ anwendest, passiert folgendes:

$$\left(\boxed{x}+\boxed{4}\right)^2=\boxed{x}^2+2\cdot\boxed{x}\cdot\boxed{4}+\boxed{4}^2$$

Also: $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$

Die Hälfte dieser Zahl

ist diese Zahl.

$\boxed{8:2=4} \xrightarrow{\text{zum Quadrat}} \boxed{4^2=16}$

Du kannst die 1. binomische Formel auf den Term $x^2 + 8x + 16$ anwenden, denn:

$x^2 + 8x + 16$

Die Hälfte dieser Zahl

ist diese Zahl.

$\boxed{8:2=4} \xrightarrow{\text{zum Quadrat}} \boxed{4^2=16}$

Also: $$\boxed{x}^2 + 2\cdot\boxed{x}\cdot\boxed{4} + \boxed{4}^2 = \left(\boxed{x} + \boxed{4}\right)^2$$

und: $$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

Noch ein Beispiel:

Du kannst die 1. binomische Formel auf den Term $x^2 + 6x + 9$ anwenden, denn:

$x^2 + 6x + 9$

Die Hälfte dieser Zahl

ist diese Zahl.

$\boxed{6:2=3} \xrightarrow{\text{zum Quadrat}} \boxed{3^2=9}$

Also: $$\boxed{x}^2 + 2\cdot\boxed{x}\cdot\boxed{3} + \boxed{3}^2 = \left(\boxed{x} + \boxed{3}\right)^2$$

und: $$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Du kannst die 1. binomische Formel auf einen Teil des Terms $x^2 + 6x + 9 + 1$ anwenden. Das sieht dann so aus:

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{Das ist der Teil des Terms, auf den die 1. binomische Formel angewandt wurde.}} + 1 = (x + 3)^2 + 1$$

Wenn Du den Term $x^2 + 6x + 10$ umformst, kannst Du auf einen Teil des umgeformten Terms die 1. binomische Formel anwenden.

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x + 10 \\ = {} & x^2 + 6x + 9 + 1 \\ = {} & (x + 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

Warum formt man den Term $x^2 + 6x + 10$ in den Term $(x + 3)^2 + 1$ um?

Weil man so die Funktion $f(x) = x^2 + 6x + 10$,die in Normalform gegeben ist,

in die Scheitelform $f(x) = (x + 3)^2 + 1$ umformen kann.

Dazu zeigen wir noch ein weiteres Beispiel:

Wenn Du den Funktionsterm der Funktion $f(x) = \overbrace{x^2 + 6x + 11}^{\text{Das ist der Funktionsterm.}}$ umformst, kannst Du auf einen Teil des umgeformten Terms die 1. binomische Formel anwenden, denn

$$f(x) = x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + 9 + 2 = (x + 3)^2 + 2$$

Die Hälfte dieser Zahl

ist diese Zahl.

$\boxed{6:2=3} \xrightarrow{\text{zum Quadrat}} \boxed{3^2=9}$

Die Scheitelform der Funktion $f(x) = x^2 + 6x + 11$ ist also $f(x) = (x + 3)^2 + 2$.

Um ein allgemeines Verfahren, wie Du von der Normalform auf die Scheitelform kommst, beschreiben zu können, schreiben wir die obige Rechnung etwas anders auf:

$$f(x) = x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 11 = x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 + 2$$

Die Hälfte dieser Zahl

ist diese Zahl.

$\boxed{6:2=3} \xrightarrow{\text{zum Quadrat}} \boxed{3^2=9}$

Das funktioniert auch mit anderen Zahlen. Z.B.:

$$f(x) = x^2 + 14x + 156 = x^2 + 14x + 49 - 49 + 156 = x^2 + 14x + 107 = (x + 7)^2 + 107$$

Die Hälfte dieser Zahl

ist diese Zahl.

$\boxed{14:2=7} \xrightarrow{\text{zum Quadrat}} \boxed{7^2=49}$

Das allgemeine Verfahren lautet:

$$f(x)=x^2+14x+156=x^2+14x+49-49+156=x^2+14x+49+107$$

Bilde die Hälfte dieser Zahl, $\boxed{14:2=7}$ quadriere sie, $\boxed{7^2=49}$ schreibe das Ergebnis hier hin

subtrahiere das Ergebnis $\boxed{-49}$ rechne aus $\boxed{-49+156}$ schreibe das Ergebnis hier hin

$$f(x)=\underbrace{x^2+14x+49}+107=\underbrace{(x+7)^2}+107$$

wende eine binomische Formel an