

Wurzelgleichungen, Aufgaben mit Lösungen

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$-3 \cdot \sqrt{x-8} = \sqrt{x+1}$$

Wie Du die Lösung direkt ablesen kannst, steht am Ende der Rechnung.

Ausführliche Rechnung:

$$-3 \cdot \sqrt{x-8} = \sqrt{x+1}$$

$$(-3 \cdot \sqrt{x-8})^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$(-3)^2 \cdot (\sqrt{x-8})^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$9 \cdot (\sqrt{x-8})^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$9 \cdot (x-8) = (\sqrt{x+1})^2$$

$$9 \cdot (x-8) = x+1$$

$$9 \cdot x - 9 \cdot 8 = x+1$$

$$9 \cdot x - 72 = x+1$$

$$9x - 72 = x+1$$

$$9x - 72 - x = x+1 - x$$

$$8x - 72 = x+1 - x$$

$$8x - 72 = 1$$

$$8x - 72 + 72 = 1 + 72$$

$$8x + 0 = 1 + 72$$

$$8x = 1 + 72$$

$$8x = 73$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{73}{8}$$

$$x = \frac{73}{8}$$

quadrieren

ein Produkt wird quadriert, indem die einzelnen Faktoren quadriert werden

-3^2 bedeutet $-(3 \cdot 3)$ und ist -9 .
 $(-3)^2$ bedeutet $(-3) \cdot (-3)$ und ist $+9$.

$(-3)^2$ ausrechnen

Definition der Wurzel

Hier darfst Du auf keinen Fall die Klammer vergessen, denn es soll ja die gesamte Summe $x - 8$ mit dem Faktor 9 multipliziert werden.

Definition der Wurzel

Distributivgesetz

$9 \cdot 8$ ausrechnen

Mal - Punkt weglassen

auf beiden Seiten $-x$ rechnen

$9x$ und $-x$ zusammenfassen

x und $-x$ hebt sich auf

auf beiden Seiten $+72$ rechnen

$-72 + 72$ ausrechnen

$+0$ weglassen

$1 + 72$ ausrechnen

auf beiden Seiten $:8$ rechnen

kürzen

Probe:

$$\begin{aligned} -3 \cdot \sqrt{\frac{73}{8} - 8} &= \sqrt{\frac{73}{8} + 1} && \text{8 erweitern} \\ -3 \cdot \sqrt{\frac{73}{8} + \frac{8}{8}} &= \sqrt{\frac{73}{8} + \frac{16}{8}} && \text{2 erweitern} \\ -3 \cdot \sqrt{\frac{81}{8}} &= \sqrt{\frac{73}{8} + \frac{16}{8}} && \text{ausrechnen} \\ -3 \cdot \sqrt{\frac{81}{8}} &= \sqrt{\frac{73}{8} + \frac{16}{8}} && \text{ausrechnen} \\ -3 \cdot \sqrt{\frac{81}{8}} &= \sqrt{\frac{89}{8}} && \text{umformen} \\ -3 \cdot \sqrt{\frac{9^2}{8}} &= \sqrt{\frac{89}{8}} && \text{Wurzelgesetz} \\ -3 \cdot 9 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} &= \sqrt{\frac{89}{8}} && \text{ausrechnen} \\ -27 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} &= \sqrt{\frac{89}{8}} && \text{Wurzelgesetz} \\ -27 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} &= \sqrt{89} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} && \text{auf beiden Seiten durch die Wurzel teilen} \\ -27 &= \sqrt{89} && \text{⚡} \end{aligned}$$

Die Probe führt zu einem Widerspruch. Also ist die Gleichung nicht lösbar und die Lösungsmenge ist leer. In Zeichen:

$$IL = \{ \}$$

Fertig. ✓

Das L mit dem Doppelstrich ist das Zeichen für die Lösungsmenge.

Nur der Vollständigkeit halber ist hier die ganze Probe gezeigt. Mit den Überlegungen auf der nächsten Seite hättest Du mit dem Umformen und dem Rechnen gar nicht erst anfangen müssen.

Du hättest Dir am Anfang auch direkt überlegen können, dass Wurzeln nur positiv oder gleich Null sein können.

Wäre die Wurzel auf der linken Seite der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{c} \text{diese hier} \\ \downarrow \\ -3 \cdot \sqrt{x-8} = \sqrt{x+1} \end{array}$$

positiv, dann wäre die linke Seite der Gleichung negativ

(weil ja etwas positives mit -3 multipliziert wird)

und die rechte Seite wäre

(weil sie nur aus einer Wurzel besteht)

positiv oder gleich Null. Das geht aber nicht.

Wäre die Wurzel auf der linken Seite der Ausgangsgleichung gleich Null, dann wäre die ganze linke Seite der Gleichung gleich Null und x wäre gleich **8**.

Die rechte Seite der Gleichung wäre dann auf jeden Fall aber nicht gleich Null, da $x + 1$ nicht gleich Null wird, wenn Du für x die Zahl **8** einsetzt.

Also kann die Gleichung keine Lösung haben.