

Wurzelgleichungen, Aufgaben mit Lösungen

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\sqrt{3x-7} + \sqrt{3x} = 7$$

Ausführliche Rechnung:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x-7} + \sqrt{3x} = 7 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{3x-7})^2 + 2 \cdot \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} + (\sqrt{3x})^2 = 7^2 && \text{beide Seiten quadrieren, 1. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow & 3x - 7 + 2 \cdot \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} + 3x = 49 && (\sqrt{\quad})^2 \text{ kannst Du weglassen, falls der Radikand } \geq 0 \text{ ist} \\ \Leftrightarrow & 3x - 7 + 2 \cdot \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} + 3x = 49 && (\sqrt{\quad})^2 \text{ kannst Du weglassen, falls der Radikand } \geq 0 \text{ ist} \\ \Leftrightarrow & 3x - 7 + 2 \cdot \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} + 3x = 49 && \text{ausrechnen} \\ \Leftrightarrow & 3x - 7 + 2 \cdot \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} + 3x = 49 && \text{gleichartige Terme zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow & 6x - 7 + 2 \cdot \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} = 49 && \text{auf beiden Seiten } -6x \text{ und } +7 \text{ rechnen} \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} = 56 - 6x && \text{beide Seiten durch 2 teilen} \\ \Leftrightarrow & \frac{2 \cdot \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x}}{2} = \frac{56 - 6x}{2} && \text{kürzen} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} = \frac{56 - 6x}{2} && \text{Bruchrechenregel} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} = \frac{56}{2} - \frac{6x}{2} && \text{kürzen} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3x-7} \cdot \sqrt{3x} = 28 - 3x && \text{Wurzelgesetz} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(3x-7) \cdot 3x} = 28 - 3x && \text{beide Seiten quadrieren} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{(3x-7) \cdot 3x})^2 = (28 - 3x)^2 && (\sqrt{\quad})^2 \text{ kannst Du weglassen, falls der Radikand } \geq 0 \text{ ist} \\ \Leftrightarrow & (3x-7) \cdot 3x = (28 - 3x)^2 && \text{Distributivgesetz} \\ \Leftrightarrow & 3x \cdot 3x - 7 \cdot 3x = (28 - 3x)^2 && \text{ausrechnen} \\ \Leftrightarrow & 9x^2 - 7 \cdot 3x = (28 - 3x)^2 && \text{ausrechnen} \\ \Leftrightarrow & 9x^2 - 21x = (28 - 3x)^2 && \text{2. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow & 9x^2 - 21x = 28^2 - 2 \cdot 28 \cdot 3x + (3x)^2 && \text{ausrechnen} \\ \Leftrightarrow & 9x^2 - 21x = 784 - 2 \cdot 28 \cdot 3x + (3x)^2 && \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 21x = 784 - 2 \cdot 28 \cdot 3x + (3x)^2$$

ausrechnen

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 21x = 784 - 168x + (3x)^2$$

ausrechnen

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 21x = 784 - 168x + 9x^2$$

auf beiden Seiten $-9x^2$ rechnen

$$\Leftrightarrow -21x = 784 - 168x$$

auf beiden Seiten $+168x$ rechnen

$$\Leftrightarrow 147x = 784$$

auf beiden Seiten durch 784 teilen

$$\Leftrightarrow x = \frac{784}{147}$$

Primfaktorzerlegungen

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 7}$$

kürzen

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}$$

Probe:

$$\sqrt{3 \cdot \frac{16}{3} - 7} + \sqrt{3 \cdot \frac{16}{3}} = 7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16 - 7} + \sqrt{16} = 7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$$

$$\Leftrightarrow 3 + 4 = 7$$

Die Probe zeigt, dass Du eine richtige Gleichung erhältst, wenn Du in die Ausgangsgleichung für x die Zahl $\frac{16}{3}$ einsetzt. In Zeichen:

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{16}{3} \right\}$$

Fertig. ✓